

Semaine 1 : Trigonométrie

Exercice 1: Déterminer une formule pour $\tan(x + y)$, en fonction de $\tan(x)$ et $\tan(y)$

Exercice 2: Démontrer les formules $\cos x = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$ et $\sin x = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$

Exercice 3: Résoudre les équations : $\sin x + \cos x = 0$ et $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 4: Démontrer que $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

Exercice 5: Linéariser $f_1(x) = \sin^3 x$ et $f_2(x) = \sin x \cos^2 x$.

Exercice 6: Démontrer que $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$.

Exercice 7: Démontrer en utilisant les complexes que

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a + b + c) = 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a+c}{2} \sin \frac{b+c}{2}$$

Application dans le cas où a, b, c sont les angles d'un triangle.

Exercice 8: Dans un triangle ABC , on note a, b, c les longueurs des cotés opposés à A, B et C et p le demi-périmètre du triangle.

a) Montrer la formule d'Al-Kashi : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$.

- Avec le produit scalaire.
- Avec des arguments de trigonométrie et le théorème de Pythagore.

b) Montrer que $\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$.

c) En déduire la formule de Héron : $\text{aire}(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

d) Montrer que dans un triangle qui n'est pas rectangle on a :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Semaine 2 : Intégration 1

Exercice 9: Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} x \cdot \sin 5x \, dx$$

$$I_3 = \int_0^4 \frac{2 + \sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}} \, dt$$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{e^{3x}}{1 + e^x} \, dx$$

$$I_2 = \int_0^1 \ln(1 + x^2) \, dx$$

$$I_4 = \int_0^\pi x^2 \cos x \, dx$$

$$I_6 = \int_1^e \frac{\ln x}{x(2 + \ln x)} \, dx$$

Exercice 10: Calculer l'intégrale $\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2} \, dt$ en posant $t = \sin x$.

Exercice 11: Déterminer les primitives suivantes :

$$(I_1) : \int^x t \cdot \cos(2t^2 + 1) \, dt$$

$$(I_4) : \int^x e^{2t} \cos(e^t) \, dt$$

$$(I_7) : \int^x \sin t \cos^3 t \, dt$$

$$(I_2) : \int^x \frac{\sqrt{t}}{t+1} \, dt$$

$$(I_5) : \int^x \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} \, dt$$

$$(I_8) : \int^x \cos^3 t \, dt$$

$$(I_3) : \int^x \frac{\arctan \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \, dt$$

$$(I_6) : \int^x \frac{e^t}{e^{2t} + 1} \, dt$$

$$(I_9) : \int^x \cos^3 t \sin^2 t \, dt$$

Exercice 12: Déterminer les limites suivantes :

$$l_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2}; \quad l_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n+k}; \quad l_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2};$$

Semaine 3 : Intégration 2

Exercice 13: Calculer les intégrales ou primitives des fractions rationnelles suivantes :

$$(I_1) : \int_1^2 \frac{1}{x^2+x} dx$$

$$(I_5) : \int \frac{8x+4}{4x^2+4x+5} dx$$

$$(I_2) : \int \frac{x^2+1}{x^2+x-2} dx$$

$$(I_6) : \int \frac{1}{4x^2+4x+5} dx$$

$$(I_3) : \int \frac{1}{x^3+3x^2-4} dx$$

$$(I_7) : \int_0^1 \frac{3x+2}{x^2+2x+5} dx$$

$$(I_4) : \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+3x+2)(x+3)} dx$$

$$(I_8) : \int_0^2 \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)^2}$$

Exercice 14: Calculer $I + J$, $I - J$ et en déduire les valeurs de I et J :

$$I = \int_0^{\pi/4} (2x+1) \cos^2 x dx \quad J = \int_0^{\pi/4} (2x+1) \sin^2 x dx$$

Exercice 15: Calculer les intégrales généralisées suivantes, lorsqu'une borne est infinie, il suffit de faire tendre la borne vers l'infini pour avoir le résultat, ainsi par définition

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(x) dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)} dx \quad \int_1^{+\infty} \frac{2x-3}{x(x^2+1)} dx \quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx \quad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin x dx \quad (\lambda > 0)$$

Semaine 4 : Fonctions de plusieurs variables

Exercice 16: Soit A et B deux points du plan \mathbb{R}^2 de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B)

- Quelles sont les équations des droites passant par A ?
- Quelle est l'équation de la droite (AB) ?

Exercice 17: Soit A, B, C trois points de l'espace de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) et (x_C, y_C, z_C)

- Quelles sont les équations des plans passant par A .
- Quelle est l'équation du plan (ABC) ?

Exercice 18: Étudier les fonctions suivantes et préciser les éventuels extrema :

- $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.
- $g : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$.
- $h : x \mapsto \sin(x)(1+\cos(x))$.

d) $k : x \mapsto \ln(1 + e^x) - \frac{x}{2}$.

Exercice 19: Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $(x; y) \mapsto \frac{x\sqrt{y}}{x^2 + y^2}$.

b) $(x; y) \mapsto \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$.

c) $(x; y) \mapsto \ln(xy)$.

d) $(x; y) \mapsto x \ln(y^2 - x)$.

e) $(x; y) \mapsto \sqrt{4x - x^2 + 2y - y^2}$.

Exercice 20:

Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes et déterminer $f'_i(0)$ le cas échéant.

a) Soit f_1 définie sur \mathbb{R} par : $f_1(x) = \begin{cases} x^2 \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

b) Soit f_2 définie sur \mathbb{R} par : $f_2(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 2 & \text{si } x > 0, \\ 3 \sin x - 2 \cos x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

c) Soit f_3 définie sur \mathbb{R} par : $f_3(x) = \begin{cases} x \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Exercice 21:

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$\varphi_1(x, y) = x^2 + 2xy + 2y.$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

$$\varphi_3(x, y) = x^2 e^{3y}$$

$$\varphi_4(x, y) = \sin(2x + 3y)$$

$$\varphi_5(x, y) = x^y$$

$$\varphi_6(x, y, z) = x e^{y^2 z}$$

$$\varphi_7(x, y) = \cos\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

$$\varphi_8(x, y) = \|(x, y)\|$$

Exercice 22: Pour chacune des fonctions suivantes, étudier l'existence des dérivées partielles en $(0, 0)$.

a) $\varphi(x, 0) = x$; $\varphi(0, y) = 2y$ et sinon $\varphi(x, y) = 0$.

b) $\varphi(x, x) = x$; $\varphi(x, -x) = 2x$ et sinon $\varphi(x, y) = 2x - 3y + xy$.

c) $\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

d) $\varphi(x, y) = \frac{\sin(x^3 + 5y^3)}{x^2 + y^2}$ pour $(x, y) \neq (0; 0)$ et $\varphi(0, 0) = 0$.

e) $\varphi(x, y) = \sin(2x) + y$ pour $|y| \leq |x|$ et $\varphi(x, y) = e^{3x+5y}$ pour $|y| > |x|$.

Exercice 23: Soit $\varphi(x, y) = \frac{xy}{y-x}$ pour $x \neq y$ et $\varphi(x, x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que les dérivées partielles de φ existent en $(0, 0)$.

b) Est-ce que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 1)$ existe? Est-ce que $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1)$ existe?

Exercice 24: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, on pose $\varphi(x,y) = f(x^2 + y^2)$, calculer $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, en fonction de la dérivée de f . Même question pour $\psi(x,y) = f(x)f(\frac{x}{y})$ et $\gamma(x,y) = f(x^2 + f(y)^2)$.

Semaine 5 : Continuité, limites

Exercice 25: Soient les fonctions définies sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $\varphi(x,y) = \frac{\sin x}{x+y}$ et $\psi(x,y) = x^y$.

Comparer $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \varphi(x,y) \right]$, $\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x,y) \right]$ et $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varphi(x,y)$.

Exercice 26: Soit $\varphi(x,y) = \frac{xy}{y-x}$ pour $x \neq y$ et $\varphi(x,x) = 0$.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \varphi(x,y) \right]$, $\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x,y) \right]$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x, \lambda x)$.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x, x + x^2)$.
- Que peut-on en conclure quant à la limite de φ en $(0,0)$?

Exercice 27: Soit $\varphi(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $\varphi(0,0) = 0$.

- Montrer que φ est continue en $(0,0)$.
- Calculer les dérivées partielles de φ en $(0,0)$.
- Calculer les dérivées partielles de φ en tout point différent de $(0,0)$.
- Montrer que les dérivées partielles de φ ne sont pas continues en $(0,0)$.

Exercice 28: Soit $\varphi(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $\varphi(0,0) = 0$.

- Montrer que φ est continue en 0.
- Calculer les dérivées partielles de φ en $(0,0)$.
- Calculer les dérivées partielles de φ en tout point différent de $(0,0)$.
- Montrer que les dérivées partielles de φ sont continues en $(0,0)$.

Exercice 29:

Trouver toutes les applications $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = x^3 + y.$$

Exercice 30: Pour chacune des fonctions suivantes, étudier la continuité en $(0,0)$.

- $\varphi_1(x,0) = x$; $\varphi(0,y) = 2y$ et sinon $\varphi(x,y) = 0$.
- $\varphi_2(x,0) = x^2$; $\varphi(0,y) = y^2$ et sinon $\varphi(x,y) = \cos(xy)$.
- $\varphi_3(x,x) = x$; $\varphi(x, -x) = 2x$ et sinon $\varphi(x,y) = 0$.
- $\varphi_4(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $\varphi_5(x,y) = \frac{\sin(x^3 + 5y^3)}{x^2 + y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $\varphi(0,0) = 0$.
- $\varphi_6(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $\varphi(0,0) = 0$.

Exercice 31: Soit $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$ pour $y < x$ et $\varphi(x,y) = x^2 - y^2$ pour $y \geq x$.

- Montrer que φ est continue.
- Étudier l'existence des dérivées partielles de φ .
- Sur quel ouvert maximal les dérivées partielles de φ sont-elle définies?

Semaine 6 : Différentielle, DL₁

Exercice 32: Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa différentielle au point A , ainsi que son DL₁ en A .

- a) $\varphi_1(x, y) = \ln(x + 2y)$, $A = (3, 1)$.
 b) $\varphi_2(x, y) = xe^{xy}$, $A = (1, 2)$.
 c) $\varphi_3(x, y) = \sin(x) \sin(y)$, $A = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$.
 d) $\varphi_4(x, y) = \sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2})$, $A = (3; 4)$.

Exercice 33:

Les fonctions suivantes sont-elles en $(0,0)$ des $o(\|(x,y)\|)$? des $o(\|(x,y)\|^2)$?

$$\begin{array}{ll} \varphi_1(x,y) = x & \varphi_5(x,y) = \sin(xy) \\ \varphi_2(x,y) = xy & \varphi_6(x,y,z) = \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} \\ \varphi_3(x,y) = x^2 + 3y^2 & \varphi_7(x,y) = x^2 + y \\ \varphi_4(x,y) = x^2y^2 + x^4 + y^3 & \end{array}$$

Exercice 34: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , vérifiant $\varphi(1; 3) = 0$; $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(1; 3) = 2$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(1; 3) = 1$

- a) φ possède-t-elle un extremum local en $(1; 3)$?
 b) Écrire un DL₁ de φ en $(1; 3)$.
 c) Donner une valeur approchée de $\varphi(1,1; 2,9)$
 d) On pose pour tout réel t , $f(t) = \varphi(5 - 4t; 3t^2)$, en revenant à la définition de la dérivée de f en 1 calculer $f'(1)$.

Semaine 7 : Composée

Exercice 35: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et f l'application définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \varphi(e^t + t, t^2 - 3t)$. Calculer la dérivée de f .

Exercice 36: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et h l'application définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \varphi(x, x)$. Calculer la dérivée de h en fonction des dérivées partielles de φ .

Exercice 37: Soit Φ définie sur \mathbb{R}^2 par $\Phi(u, v) = (u^2 + v^2, uv)$ et $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , déterminer les dérivées partielles de $\psi \circ \Phi$.

Exercice 38: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^1 .

On définit, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = \varphi(tx, ty)$.

- a) Dans cette question et uniquement dans cette question on suppose que $\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, déterminer la fonction g , calculer $g'(t)$.
 b) Calculer $g'(t)$, en fonction des dérivées partielles de φ .
 c) On suppose désormais que $\varphi(tx, ty) = t\varphi(x, y)$ pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$.
 i) Montrer que pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(tx, ty)x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(tx, ty)y.$$

 ii) En déduire qu'il existe des réels α et β que l'on déterminera tels que, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\varphi(x, y) = \alpha x + \beta y$.

Exercice 39: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , vérifiant

$$\varphi(3; 1) = 1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(3; 1) = 7; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(3; 1) = -5$$

- Écrire un DL₁ de φ en $A = (3; 1)$.
- On pose pour tout réel t , $f(t) = \varphi(4t - 1; 6t - 5)$, calculer $f'(t)$, puis $f'(1)$.
- Écrire un DL₁ de f en 1.
- On pose pour tout réel t , $g(t) = \varphi(t^2 + 2t; t)$, calculer $g'(t)$, puis $g'(1)$
- On pose pour tout réel t , $h(t) = \varphi(2t + \varphi(t^3 + 2; t^2), \varphi(3t; t^5))$, calculer $h'(1)$.

Exercice 40: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , vérifiant

$$\varphi(1; 1) = -1; \quad \varphi(4; 0) = 1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(1; 1) = 3; \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(1; 1) = 1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(4; 0) = 5; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(4; 0) = 2;$$

- Soit $f(t) = \varphi(t^2; 2 - t)$, calculer $f'(1)$ et $f'(2)$.
- On pose pour tout réel t , $g(t) = \varphi(\varphi(4; t); \varphi^2(1 + t^2; (1 + t)^2))$, calculer $g'(0)$.
- On pose pour tout réel t , $h(t) = \varphi(at + b; ct + d)$, comment choisir a, b, c, d pour que le graphe de h ait une tangente horizontale en $(2; 1)$.

Semaine 8 : Dérivées partielles secondes

Exercice 41:

Calculer les dérivées partielles à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

- $\varphi_1(x, y) = x^2(x + y)$.
- $\varphi_2(x, y) = e^{xy}$.

Exercice 42: Écrire le DL₂ de φ_i au voisinage du point M_i .

- $\varphi_1(x, y) = \sin x \sin y$ et $M_1 = (0; 0)$.
- $\varphi_2(x, y) = x \ln(x^2 + y^2)$ et $M_2 = (e^{-1}; 0)$.
- $\varphi_3(x, y) = e^{xy}$ et $M_3 = (0; 1)$.

Exercice 43: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , telle que

$$\varphi(0; 1) = 1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0; 1) = 2; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(0; 1) = 3; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(0; 1) = 5; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}(0; 1) = -5; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(0; 1) = 7 \text{ et}$$

$$f(t) = \varphi(t^2, e^{3t})$$

Déterminer un DL₂ de f en 0, on pourra commencer par calculer $f'(0)$, $f''(0)$.

Exercice 44: Soit φ une application de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} et $r \in \mathbb{R}$.

On dit que φ est homogène de degré r si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, \varphi(tx, ty) = t^r \varphi(x, y).$$

- Montrer que la fonction définie par $\psi(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2$ est homogène.
- Montrer que si φ est homogène de degré r , alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $r - 1$.
- Montrer que si φ est homogène de degré r alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = r\varphi(x, y).$$

d) Montrer que si φ est homogène de degré r et \mathcal{C}^2 , alors :

$$x^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) + 2xy \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) = r(r-1)\varphi(x,y).$$

Exercice 45: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , vérifiant

$$\begin{aligned} \varphi(4;1) = 1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(4;1) = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(4;1) = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(4;1) = 1; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}(4;1) = 7 \text{ et } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(4;1) = 4 \\ \varphi(1;1) = -1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(1;1) = 3; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(1;1) = 1; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(1;1) = 4; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}(1;1) = 2 \text{ et } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(1;1) = 1 \end{aligned}$$

- Écrire un DL₂ de φ en $(4;1)$, écrire la Hessienne de φ en $(4;1)$.
- On pose pour tout réel t , $f(t) = \varphi((1+t)^2, t)$, calculer $f'(t)$, puis $f''(t)$.
- Calculer $f'(1)$ et $f''(1)$?
- Montrer que f possède un minimum local strict en 1.

Exercice 46: Soit φ une application de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Dans cet exercice on n'utilisera pas les matrices hessiennes, on démontrera le résultat sans utiliser de théorème mais en revenant à la définition des extrema locaux.

- Montrer que si $\varphi(x,y) = x^2 - y^2 + o(x^2 + y^2)$ alors φ ne possède pas d'extremum à l'origine.
- Montrer que si $\varphi(x,y) = xy + o(x^2 + y^2)$ alors φ ne possède pas d'extremum à l'origine.
- Montrer que si $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 + o(x^2 + y^2)$ alors φ possède un minimum à l'origine.
- Montrer que si $\varphi(x,y) = x^2 + 3y^2 + o(x^2 + y^2)$ alors φ possède un minimum à l'origine.
- Montrer que si $\varphi(x,y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + o(x^2 + y^2)$ alors φ possède un minimum à l'origine.
- Montrer que si $\varphi(x,y) = x^2 + 4xy + y^2 + o(x^2 + y^2)$ alors φ ne possède pas d'extremum à l'origine.

Semaine 9 : Extrema

Exercice 47:

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la matrice hessienne et en déduire la nature du point critique donné :

- $\varphi_1(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2 + z^2$ au point critique $(0,0,0)$.
- $\varphi_2(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + 3xy$ au point critique $(0,0)$.
- $\varphi_3(x,y) = x^y$ au point critique $(1,0)$.
- $\varphi_4(x,y) = (x+y)^3 - y^2 - 3(x+y)$ au point critique $(-1,0)$.

Exercice 48: Trouver les points critiques des fonctions suivantes et déterminer si ce sont des maxima/minima locaux ou des points selles, (sans utiliser la méthode de Monge) :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,y) = x^2 y^2 - x^2 - y^2 & \qquad \varphi_3(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy \\ \varphi_2(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1 & \qquad \varphi_4(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2 \end{aligned}$$

Exercice 49: Trouver les points critiques des fonctions suivantes et déterminer si ce sont des extrema locaux, des extrema globaux, on pourra commencer par montrer que pour tout réels x,y on a $2xy \leq x^2 + y^2$.

$$\varphi_1(x,y) = 4xy - x^4 - y^4 \qquad \varphi_2(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$$

Exercice 50: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle qu'il existe $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telles que :

$$\varphi(x,y) = g(x) + h(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- a) Montrer que si g admet un maximum global en x_0 et h admet un maximum global en y_0 , alors φ admet un maximum global en (x_0, y_0) .
- b) Dédurre de la question précédente les maxima globaux de $\varphi(x, y) = \sin(x) - y^2 + 2y - 1$.
- c) Montrer que si g admet un maximum local en x_0 et h admet un maximum local en y_0 , alors φ admet un maximum local en (x_0, y_0) .
- d) **Bonus** Que dire de φ en un point (x_0, y_0) tel que g admet un maximum local strict en x_0 et h admet un minimum local strict en y_0 ?
- e) Que dire dans le cas où $\varphi(x, y) = g(x)h(y)$ avec $g, h > 0$, puis le cas $g > 0, h < 0$

Exercice 51:

Sur le plan de \mathbb{R}^3 d'équation $2x - 2y + z = 15$, déterminer le point le plus proche de l'origine.

Exercice 52: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , vérifiant $\varphi(0; 1) = 1$; $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0; 1) = 0$;

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(0; 1) = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(0, 1) = 1; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}(0, 1) = 3 \text{ et } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 1) = 2$$

- a) Écrire la Hessienne de φ en $(0; 1)$, puis un DL₂ de φ en $(0, 1)$.
- b) φ possède-t-elle un extremum local en $(0; 1)$?

Exercice 53: Parmi tous les triangles de périmètre p quels sont ceux d'aire maximale, on pourra utiliser la formule de Héron (exo8)

Semaine 10 : Fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q

Exercice 54: Justifier que les applications suivantes sont de classe \mathcal{C}^1 et écrire leur matrice jacobienne en un point donné.

$$\Phi_1(x, y) = (x + y, x - y)$$

$$\Phi_4(x, y, z) = (x + y^2, xyz^2)$$

$$\Phi_2(x, y) = \left(\sin(x^2 - y^2); \frac{y}{x} \right)$$

$$\Phi_5(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}(x^2 - z^2), \sin(x) \sin\left(\frac{z}{x}\right) \right)$$

$$\Phi_3(x, y, z) = (xy^2, x^2 e^{y+z}, \sin x)$$

Exercice 55:

On considère les fonctions $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\Phi(x, y) = \left(\sin(xy), \cos x, e^{y^2} \right) \text{ et } \psi(u, v, w) = uvw.$$

- a) Calculer explicitement $\psi \circ \Phi$.
- b) En utilisant la question a), calculer les dérivées partielles de $\psi \circ \Phi$.
- c) Déterminer les matrices jacobienes $J_\Phi(x, y)$ et $J_\psi(u, v, w)$ de ψ et de Φ .
- d) Retrouver le résultat de b) en utilisant un produit approprié de matrices jacobienes.

Exercice 56:

Soient $F(t) = (t^2, e^{2t})$, $\Phi(x, y) = (xy, \frac{x}{y})$, $\varphi(x, y) = x^2 + 3y$, dériver la fonction $h = \varphi \circ \Phi \circ F$.

Exercice 57: Une fonction de plusieurs variables $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si elle vérifie

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^p, \forall t \in [0; 1], \varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$$

Montrer qu'une fonction convexe de classe \mathcal{C}^1 qui possède un point critique en a possède un minimum en a . On pourra supposer qu'il existe b tel que $\varphi(a) > \varphi(b)$ puis montrer que :

$$\varphi(a + t(b - a)) - \varphi(a) \leq t(\varphi(b) - \varphi(a))$$

Révision ...